Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**
2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtscjn.fr/assets/annales/bts-cjn/E2 - Mathématiques/2022/BTS CJN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les trois parties étudient une équation différentielle, les variations et la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente de la fonction.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule des solutions de $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0{,}8$. On obtient donc toutes les solutions de l'équation homogène sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t)=0$. En remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche de (E), on trouve $0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Cette expression est égale au membre de droite de l'équation : g en est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t)=5$ est une solution particulière de (E). Toute solution de (E) s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, qui est $y(t)=ke^{-0,8t}$. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, on impose $f(0)=20$. Comme $e^0=1$, on a $f(0)=k+5$. Ainsi, $k+5=20$, d'où $k=15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction qui vérifie la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t)=15e^{-0,8t}+5$. Lorsque t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers -∞, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le premier terme tend alors vers 0 et le second reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5.$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en +∞ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale, dont l'ordonnée est égale à cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t)=-12e^{-0,8t}<0$ sur l'intervalle : f est strictement décroissante. Elle commence à 20 et tend vers 5.

t	**0**	**+∞**
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse du chariot est $f(t)=15e^{-0,8t}+5$. Comme l'exponentielle est strictement positive pour tout $t \geq 0$, on a toujours $f(t)>5$. La vitesse ne peut donc pas atteindre 0, même si elle se rapproche de 5 lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant le premier terme, on obtient $(-18{,}75e^{-0{,}8t})' = 18{,}75 \times 0{,}8e^{-0{,}8t} = 15e^{-0{,}8t}$. Le second terme a pour dérivée $(5t)'=5$. Ainsi, $F'(t)=15e^{-0{,}8t}+5=f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **En utilisant l'intégrale de f, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental de l'analyse, la distance entre 0 et 1 vaut $F(1)-F(0)$. Or $F(1)=-18{,}75e^{-0{,}8}+5$ et $F(0)=-18{,}75$. La différence donne la valeur exacte, puis l'arrondi au centimètre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}\ \mathrm{m} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}.$

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.**

Le développement limité affiché donne les termes réguliers jusqu'à l'ordre 2. Parmi les propositions, la bonne est celle qui reprend ces termes et exprime le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 en 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y=f(0)+f'(0)t$. D'après l'énoncé, $f(0)=20$ et $f'(0)=-12e^{0}=-12$. La tangente passe donc par le point $(0\ ;\ 20)$ et a pour pente −12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

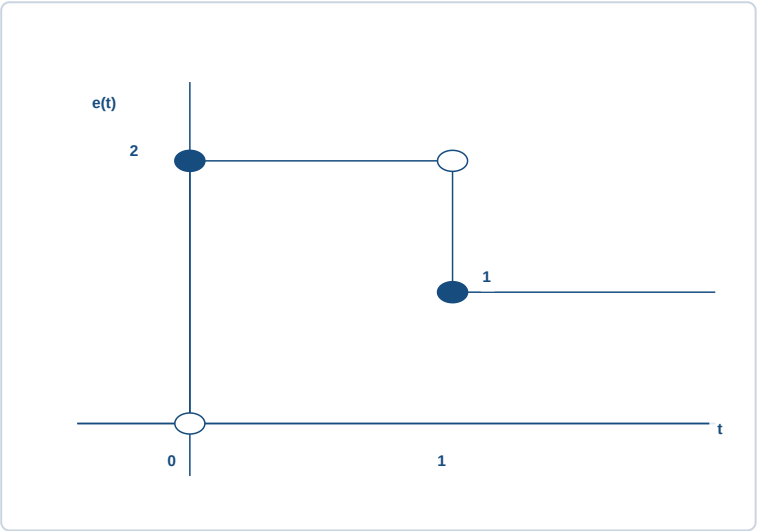
Un système électrique reçoit un signal d'entrée e(t) et produit un signal de sortie s(t), liés par une fonction de transfert. L'exercice utilise la fonction échelon unité et les transformées de Laplace pour déterminer les signaux, leurs représentations graphiques et le comportement de la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Comme le signal est causal, il vaut 0 pour *t<0*. À partir de *t=0*, il vaut 2 jusqu'à *t=1* exclu. En *t=1*, le second échelon s'active et le signal prend la valeur 1, qu'il conserve ensuite.

Courbe du signal e(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> *e(t)=0* pour *t<0*, *e(t)=2* sur *[0;1[*, puis *e(t)=1* pour *t≥1*.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, on transforme séparément les deux échelons. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$. Pour l'échelon retardé d'une unité, la propriété de décalage donne $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On combine ensuite ces résultats avec les coefficients de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on multiplie les deux facteurs puis on distribue le numérateur sur le dénominateur commun. On obtient ainsi les deux termes demandés, dont le second contient le facteur de retard e^{-p}.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Réduisons le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les deux membres sont définis.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e⁻ᵖ/p et e⁻ᵖ/(p + 1).

Les deux premières transformées sont usuelles : $1/p$ correspond à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à l'échelon multiplié par e^{-t}. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} applique un retard d'une unité : on multiplie chaque fonction retardée par $U(t-1)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Le second terme correspond à une fonction retardée d'une unité : il est nul pour $0 \leq t < 1$. On inverse donc uniquement le premier terme sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

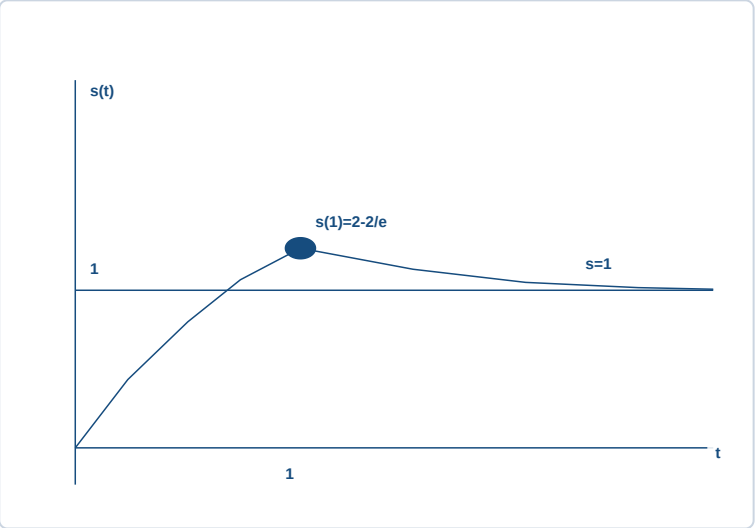
À l'instant $t = 1$, l'expression fournie donne $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie : $s(1) = 2 - 2/e$. Cette valeur est environ $1,264$, soit $1,3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la sortie suit $2(1-e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. À partir de $t = 1$, elle suit $1 + (e-2)e^{-t}$ et décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, donc la courbe est continue et atteint là son maximum.

Courbe représentative de s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite, et il reste la constante 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, durée 2 heures, avec un coefficient de 1,5 en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique. Les compétences portent sur équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- En transformée de Laplace, un retard f(t - a)U(t - a) correspond à $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle.
- Interpréter la limite de la vitesse pour discuter l'arrêt et relier le signe de f' au sens de variation.
- Évaluer la primitive aux bornes dans le bon ordre et respecter l'arrondi demandé au centimètre.
- Pour les signaux retardés, appliquer le facteur exponentiel et respecter les intervalles de définition.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment appliquer la condition initiale dans l'équation différentielle du chariot ?

Écrivez d'abord la solution générale de y' + 0,8y = 4. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour déterminer la constante d'intégration et obtenir la solution particulière correspondant au chariot.

Q : Comment reconnaître l'asymptote horizontale de la vitesse ?

Calculez la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Si elle vaut un réel L, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L. Dans ce sujet, il faut aussi interpréter cette limite comme une vitesse résiduelle.

Q : Comment gérer le temps et les documents à rendre pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les exercices, gardez une courte vérification finale et complétez le document-réponse demandé pour les courbes de l'exercice 2.

Q : Le sujet indique-t-il un barème détaillé par question ou des normes particulières ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices, sans détailler la répartition par question. Il précise les résultats attendus, notamment la distance arrondie au centimètre et la valeur de s(1) approchée au dixième.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtscjn.fr/assets/annales/bts-cjn/E2 - Mathématiques/2022/BTS CJN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Collaborateur Juriste Notarial : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.