Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Épreuve de mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités, durée de vie et conformité de production** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**


**Sujet officiel (PDF) :** https://coursbtscjn.fr/assets/annales/bts-cjn/E2 - Mathématiques/2022/BTS CJN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

# 1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L’exercice porte sur une équation différentielle, l’étude de la fonction vitesse, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

## Partie A - Résolution d’une équation différentielle

**Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E₀) : y′ + 0,8y = 0.**

La formule fournie pour une équation de la forme $y' + ay = 0$ donne $y(t) = Ke^{-at}$. Ici, le coefficient de $y$ est $a = 0,8$. En remplaçant $a$ par cette valeur, on obtient toutes les solutions sur l’intervalle considéré. La constante $K$ est arbitraire et réelle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de $(E_0)$ sont $y(t) = Ke^{-0,8t}$, où $K \in \mathbb{R}$.

**Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[ par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.**

La fonction $g$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l’équation, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout $t \geq 0$, la fonction proposée vérifie bien l’équation différentielle $(E)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) + 0,8g(t) = 4$ : $g(t) = 5$ est solution de $(E)$.

**Question 1. c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E).**

1. Une solution particulière de $(E)$ est la fonction constante $g(t) = 5$.
2. La solution générale de l’équation homogène associée est $y_h(t) = Ke^{-0,8t}$.
3. On obtient les solutions de $(E)$ en ajoutant cette solution homogène à la solution particulière.

La constante $K$ peut prendre toute valeur réelle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L’ensemble des solutions de $(E)$ est constitué des fonctions $y(t) = 5 + Ke^{-0,8t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale trouvée précédemment s'écrit $f(t) = 5 + Ke^{-0,8t}$. À l'instant initial, $f(0) = 5 + Ke^{0} = 5 + K$. La condition imposée donne donc $20 = 5 + K$, d'où $K = 15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on détermine la fonction recherchée, qui respecte bien la vitesse initiale de $20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction vitesse qui vérifie $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Quand $t$ tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme tend donc vers zéro et le second reste constant. La limite de la fonction est ainsi égale à $5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse admet pour limite $5$ lorsque le temps tend vers l'infini : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

1. La courbe d'une fonction admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une limite finie à l'infini.
2. Ici, la limite calculée à la question précédente vaut $5$. L'asymptote horizontale est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par l'ordonnée $5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe $C$ admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

**Question 2. En admettant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle vaut $20$ en zéro et tend vers $5$ en $+\infty$.

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $-$ |
| $f(t)$ | 20 | 5 |

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;+\infty[$, $f$ est strictement décroissante de $20$ vers la limite $5$.

---

**Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Un arrêt nécessiterait que la vitesse atteigne zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La vitesse $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est donc toujours supérieure à $5$, même si elle se rapproche de cette valeur lorsque le temps augmente.

- La vitesse n'atteint jamais zéro.
- Le système ne permet donc pas au chariot de s'arrêter selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et tend vers $5$, sans jamais atteindre zéro.

---

**Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[ par F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

On dérive la fonction proposée en appliquant la dérivée d'une exponentielle composée : $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des deux coefficients donne 15"); ainsi, \(F'(t)=15e^{-0,8t}+5. Cette expression est exactement celle de $f(t)$, donc $F$ est bien une primitive de $f$ sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Comme $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, la fonction $F$ est une primitive de $f$.

---

**Question 4. b. En utilisant la formule de la distance d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

1. Une primitive de $f$ est $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$.
2. La distance sur l'intervalle $[0;1]$ vaut $F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$.
3. On obtient la valeur exacte $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit environ $15,3251$ m. Arrondie au centimètre, elle vaut $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Distance exacte : $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Au centimètre près : $15,33$ m, soit $1\,533$ cm.

## Partie C - Étude locale

**Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

Le logiciel affiche la partie polynomiale du développement limité à l'ordre 2 : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste doit s'écrire sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque $t$ tend vers zéro. Il faut donc choisir la proposition qui réunit ce polynôme et ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Choisir la troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

1. La tangente au point d'abscisse zéro a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$.
2. La condition initiale donne $f(0) = 20$, et la dérivée indiquée dans l'énoncé donne $f'(0) = -12e^0 = -12$.
3. En remplaçant ces valeurs dans la formule de la tangente, on obtient l'équation demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'équation de la tangente à $C$ au point d'abscisse $0$ est $T$ : $y = 20 - 12t$.

## 2. Probabilités, durée de vie et conformité de production

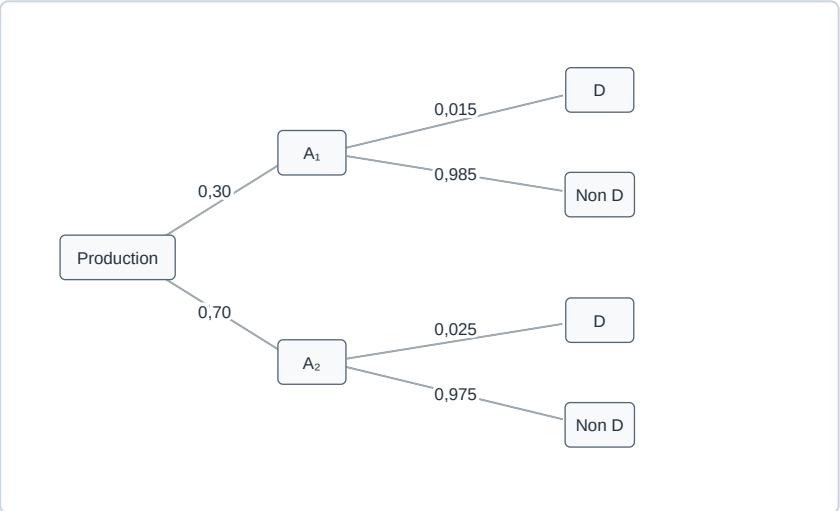
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et vérifie leur conformité; leurs durées de fonctionnement sont également étudiées. L'exercice traite des probabilités conditionnelles, d'une loi exponentielle et de l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

### Partie A - Probabilités conditionnelles

**Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, avec $A_1$ : « le tube provient de l'atelier 1 », $A_2$ : « le tube provient de l'atelier 2 » et D : « le tube présente un défaut », en indiquant les proportions de production et les taux de défaut des deux ateliers.**

L'atelier 1 fabrique 30 % des tubes et l'atelier 2 en fabrique 70 %. Depuis chaque atelier, les deux branches indiquent la présence ou l'absence d'un défaut. Les taux conditionnels sont ceux de l'énoncé : 1,5 % à l'atelier 1 et 2,5 % à l'atelier 2. Les branches complémentaires valent respectivement 98,5 % et 97,5 %.

**Arbre pondéré des ateliers et défauts**




Les probabilités des branches issues d'un atelier sont conditionnelles.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Branches : $A_1$ (0,30), $A_2$ (0,70) ; D sachant $A_1$ : 0,015 ; D sachant $A_2$ : 0,025.

**Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$.**

Pour obtenir la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la proportion produite par cet atelier par son taux de défaut conditionnel :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.
Cette probabilité porte sur la production totale et correspond à 0,45 % des tubes.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

**Question 3.** **Montrer que P(D) vaut la valeur indiquée dans l'énoncé. La valeur imprimée 0,0195 est barrée et annotée à la main 0,0220.**

Les deux chemins de l'arbre qui aboutissent à un tube défectueux sont disjoints. On additionne donc leurs probabilités :

$P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$
$= 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0220.$

Le calcul confirme la valeur corrigée à la main dans l'énoncé, et non la valeur imprimée barrée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}0220$, soit 2,20 %.

**Question 4.** **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité qu'un tube soit sans défaut vaut $1 - P(D) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$, en utilisant la valeur corrigée à la question précédente. Ainsi, par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

## Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

**Question 1.** **La durée de bon fonctionnement T d'un tube prélevé au hasard suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, l'espérance est donnée par $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Ici, $\lambda = 0{,}001$ par heure, donc $E(T) = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard dans le stock. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement pendant 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

**Question 2.** **Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une durée inférieure à 8 000 heures, avec $\lambda = 0{,}001$ :

1. $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$.
2. Arrondie au centième, cette probabilité est égale à 1,00.

La valeur arrondie correspond à près de 100 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$ au centième près.

---

**Question 3. Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser une durée $t$ est la probabilité complémentaire de la fonction de répartition : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. À l'arrondi demandé au centième, ce résultat devient 0,00. La probabilité exacte reste toutefois strictement positive.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième près.

---

## Partie C - Intervalle de confiance

**Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. On compte 975 rivets conformes parmi 1 000 rivets prélevés, donc $f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production. Exprimée en pourcentage, elle correspond à 97,5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

---

**Question 2. En utilisant la formule fournie de l'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur f pour p et arrondir ses bornes à $10^{-3}$ près.**

On applique la formule donnée avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes avant arrondi sont donc $0{,}975 - 0{,}009677 \approx 0{,}965323$ et $0{,}975 + 0{,}009677 \approx 0{,}984677$. On arrondit chaque borne à $10^{-3}$ près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, dure deux heures; son coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Elle comporte deux exercices de dix points sur le freinage d'un chariot et la production de tubes et rivets. Elle évalue la résolution d'équations différentielles, l'analyse de fonctions, les probabilités, la loi exponentielle et l'estimation statistique.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre $y' + ay = b$, ajouter une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si $f(t)$ tend vers $L$ quand $t$ tend vers $+\infty$, la courbe de $f$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance donné pour une proportion est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où $f$ est la fréquence observée.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale à la solution générale pour déterminer la constante.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers une valeur positive avec un arrêt du chariot.
- Distinguer les probabilités d'une durée inférieure à $t$ et supérieure à $t$.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et l'effectif, puis respecter l'arrondi demandé.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment utiliser la condition initiale pour trouver la solution de l'équation différentielle ?**

Écrivez la solution générale de l'équation complète, puis remplacez $t$ par 0 et $f(0)$ par 20. Résolvez l'égalité ainsi obtenue pour déterminer la constante, en utilisant $e^0 = 1$.

**Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus longtemps qu'une durée donnée ?**

Avec une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, utilisez $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Remplacez $\lambda$ et $t$ par les valeurs de l'énoncé, puis arrondissez le résultat au centième, comme demandé.

**Q : Comment répartir mon temps pendant cette épreuve ?**

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de dix points. Les parties sont indépendantes, ce qui permet de passer à une autre partie si nécessaire. Gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

**Q : Le coefficient est-il le même pour toutes les spécialités du sujet ?**

Non. Le tableau de la première page indique un coefficient 2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux, dont le coefficient est 3. Le coefficient applicable dépend donc de la spécialité présentée.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://coursbtscjn.fr/assets/annales/bts-cjn/E2 - Mathématiques/2022/BTS CJN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
**Ressources BTS Collaborateur Juriste Notarial :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.