Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

# Brevet de Technicien Supérieur
# **Groupement D**

## MATHÉMATIQUES

SESSION 2019

Durée : 2 heures

| SPÉCIALITÉS | COEFF |
|---|---|
| ANALYSES DE BIOLOGIE MÉDICALE | 1 |
| BIO ANALYSES ET CONTRÔLES | 2 |
| BIOTECHNOLOGIES | 1 |
| EUROPLASTICS ET COMPOSITES | 1,5 |
| MÉTIERS DE L'EAU | 1,5 |
| QUALITÉS DANS LES INDUSTRIES ALIMENTAIRES ET LES BIO-INDUSTRIES | 2 |

Moyens de calculs autorisés :

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.
La feuille d'annexes page 7/7 est à rendre avec la copie.

Base Nationale des Sujets d'Examen de l'enseignement professionnel

## EXERCICE 1 (10 points)

*Staphylococcus Aurerus (SA)*, plus communément appelé staphylocoque doré, est une bactérie responsable de nombreuses intoxications alimentaires. Elle est naturellement présente chez l'homme. Déposée sur un aliment et sous certaines conditions (comme notamment la présence suffisante de nutriments), elle se développe très fortement et produit des toxines. Ces toxines, une fois ingérées, sont responsables de troubles alimentaires, qui peuvent aller, dans certains cas extrêmes, jusqu'à la mort de la personne touchée.

### Partie A : Équation différentielle

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ de l'équation différentielle $20y' - 20{,}8y = 0$ où $y$ est une fonction de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. En déduire la fonction $f$ solution de cette équation différentielle qui vérifie $f(0) = 10$.

### Partie B : Modèle exponentiel

On souhaite étudier la croissance de bactéries *SA* à température ambiante sur un échantillon de mix (le mix est un mélange contenant en grande partie du lait permettant la fabrication de glaces à l'italienne).

On suppose que 10 bactéries sont déposées en même temps sur 1 g de mix. Voici les relevés du nombre de bactéries *SA* heure par heure, mesuré à partir du moment où les bactéries sont déposées sur le mix.

| Heure $(t_i)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de bactéries *SA* $(N_i)$ | 10 | 27 | 78 | 232 | 650 | 1800 | 5100 | 14100 | 39000 |

1. On effectue un changement de variable de type logarithmique : $z_i = ln(N_i)$. Compléter le tableau donné en **annexe 1 à rendre avec la copie.** On arrondira les valeurs au centième.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement $\Delta$ du nuage de points $(t_i, z_i)$ par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$. On arrondira les valeurs de $a$ et $b$ au millième.

3. En utilisant la question précédente, déterminer une expression de la fonction $N$ qui modélise le nombre de bactéries *SA* à l'instant $t$ exprimé en heures.

Dans la suite, on prendra $N(t) = 10\mathrm{e}^{1{,}04t}$ pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0; +\infty\,[$. On admet que la fonction $N$ modélise le nombre de bactéries *SA* relevées sur le mix en fonction du temps.

4. Une population donnée de bactéries voit son effectif doubler au bout d'un temps appelé « temps de génération bactérienne » et noté G. Estimer cette durée G en minutes.

5. Calculer la limite de $N$ en $+\infty$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

**Partie C : Modèle logistique.**

Dans cette partie, on étudie et on utilise un deuxième modèle, appelé modèle logistique et défini par une fonction *M*, qui, à tout instant *t* exprimé en heures, associe le nombre *M*(*t*) de bactéries de *SA* à l'instant *t* donné par :

$$M(t) = \frac{13\,500}{1\,350 \times \mathrm{e}^{-1{,}04t} + 1}.$$

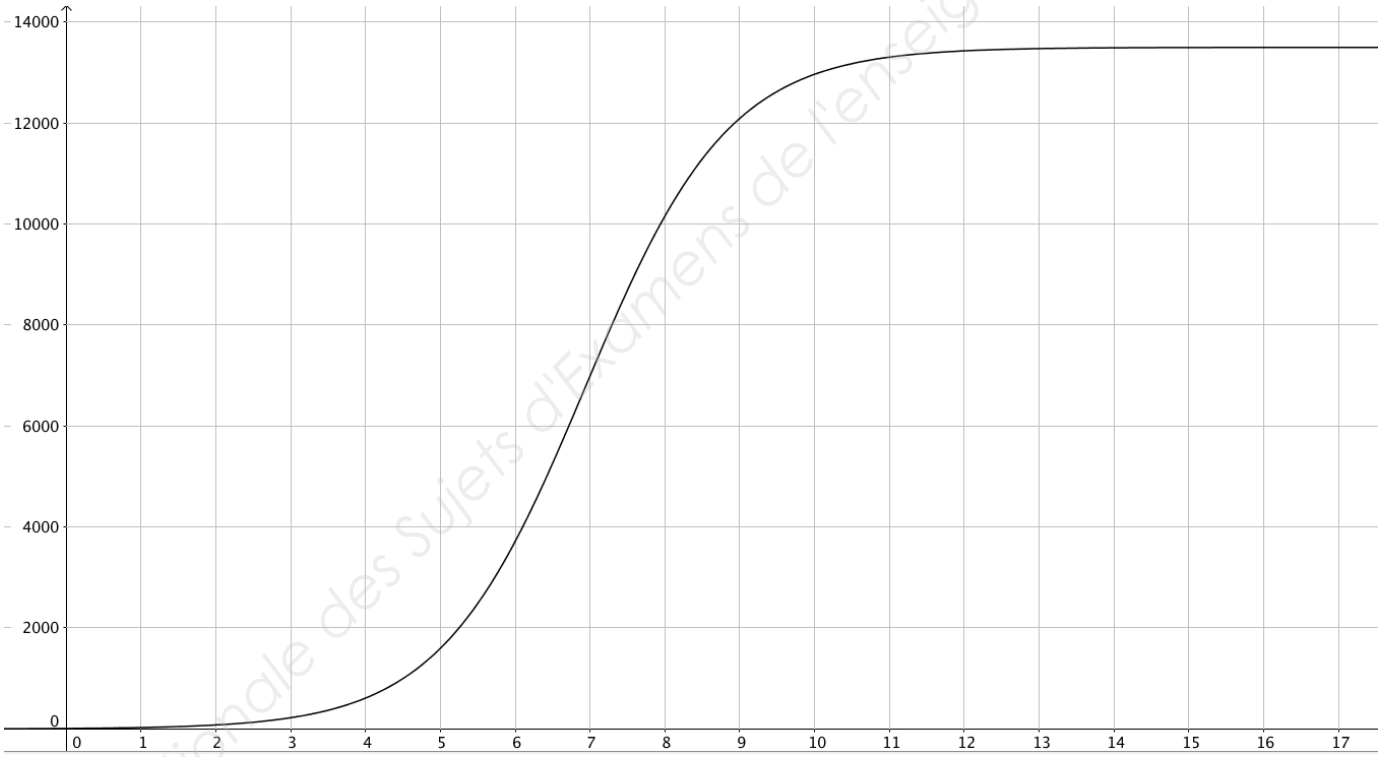
1. La dérivée de *M* est fournie par un logiciel de calcul formel :

$$M'(t) = \frac{13\,500 \times 1\,350 \times 1{,}04 \times \mathrm{e}^{-1{,}04t}}{(1\,350 \times \mathrm{e}^{-1{,}04t} + 1)^2}.$$

Étudier les variations de la fonction *M* sur l'intervalle $0; +\infty$ [.

2. a. Déterminer la limite de *M* en $+\infty$.
b. L'un des modèles de croissance de bactéries *SA* (exponentiel ou logistique) est plus vraisemblable. Lequel ?

*La courbe représentative de la fonction M est présentée ci-dessous.*




3. Déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries *SA* dépasse 10 000. Arrondir à l'heure.

*Pour tout instant t exprimé en heures, le réel $M'(t)$ est appelé vitesse de prolifération bactérienne.*

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'instant où la vitesse de prolifération bactérienne est maximale. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule d'entre elles correspond à une valeur approchée de cet instant. Laquelle ? Pourquoi ?

a. $t = 4$ h  b. $t = 7$ h  c. $t = 9$ h  d. $t = 16$ h

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

## Exercice 2 (10 points)

*Dans cet exercice, les probabilités seront données en valeurs décimales à $10^{-4}$ près.*

***Les parties A, B et C peuvent se traiter de façon indépendante.***

On s'intéresse à la production industrielle de bouteilles d'eau minérale naturelle ou d'eau de source. On s'intéresse à la qualité de l'eau contenue dans les bouteilles produites : plusieurs paramètres sont pris en compte, notamment microbiologiques (présence de bactéries, de coliformes, de germes…) et physico-chimiques (présence d'arsenic, de nickel…).

### Partie A : Eau de source et eau minérale naturelle

En 2017, des analyses identiques ont été menées sur la qualité de l'eau de 126 000 bouteilles produites. Ainsi 37 000 bouteilles d'eau minérale naturelle et 89 000 bouteilles d'eau de source ont été analysées.

Parmi les analyses portant sur les bouteilles d'eau minérale naturelle, on constate que 0,12 % des analyses révèlent une eau non conforme. Parmi celles portant sur les bouteilles d'eau de source, on constate que 0,08 % des analyses révèlent une eau non conforme.

On choisit le résultat d'une analyse d'une bouteille d'eau au hasard parmi toutes celles qui ont été réalisées.

Dans la suite, on notera les évènements suivants :

$M$ : « L'analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle » ;

$S$ : « L'analyse porte sur une bouteille d'eau de source » ;

$N$ : « L'analyse révèle une eau non conforme ».

1) Calculer les probabilités $P(M)$ et $P(S)$.

*Pour les deux questions suivantes, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.*

2) Calculer la probabilité de choisir une analyse qui révèle une eau non conforme.

3) Calculer la probabilité qu'une analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle, sachant qu'elle révèle une eau non conforme.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

**Partie B : Étude du nitrate présent dans l'eau**

Une entreprise produisant des bouteilles d'eau minérale naturelle affirme que la moyenne du taux de nitrate de sa production est égal à 4,5 mg/L. L'objectif de cette partie est de juger de la véracité de cette affirmation.

On note $\mu$ la moyenne, mesurée en mg/L, du taux de nitrate de la production, et $\sigma$ son écart type.

On réalise 600 prélèvements dans la production. Les résultats sont les suivants :

| Taux de nitrate (en mg/L) | [4,2 ; 4,3[ | [4,3 ; 4,4[ | [4,4 ; 4,5[ | [4,5 ; 4,6[ | [4,6 ; 4,7[ | [4,7 ; 4,8[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de prélèvements | 5 | 57 | 181 | 233 | 110 | 14 |

1) En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celles du centre de chaque classe, déterminer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type $s'$de cet échantillon. On donnera les résultats à $10^{-4}$ près.

2) Vérifier que $s = 0{,}0976$ est un estimateur de l'écart type $\sigma$.

3) On souhaite réaliser le test bilatéral suivant, au seuil de 5% :

$$H_0 : \quad = 4{,}5 \text{ contre } H_1 : \quad \neq 4{,}5.$$

Soit $\bar{X}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 600 prélèvements associe la moyenne du taux de nitrate de ces prélèvements. On considère que $\bar{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu$ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{600}}$.

Dans la suite, on remplace $\sigma$ par son estimateur $s = 0{,}0976$. Sous l'hypothèse $H_0$, $\bar{X}$ suit donc approximativement la loi normale d'espérance 4,5 et d'écart type 0,004.

a) On a présenté **en annexe 2** les représentations de trois densités de probabilité. Laquelle est associée à la variable aléatoire $\bar{X}$ ? Justifier la réponse.

b) Donner un nombre réel $a$ à $10^{-3}$ près vérifiant : $P(4{,}5 - a \leq \bar{X} \leq 4{,}5 + a) \approx 0{,}95$.

c) Énoncer la règle de décision de ce test.

d) D'après les résultats obtenus dans l'échantillon donné, peut-on accepter l'hypothèse $\mu = 4{,}5$ ?

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

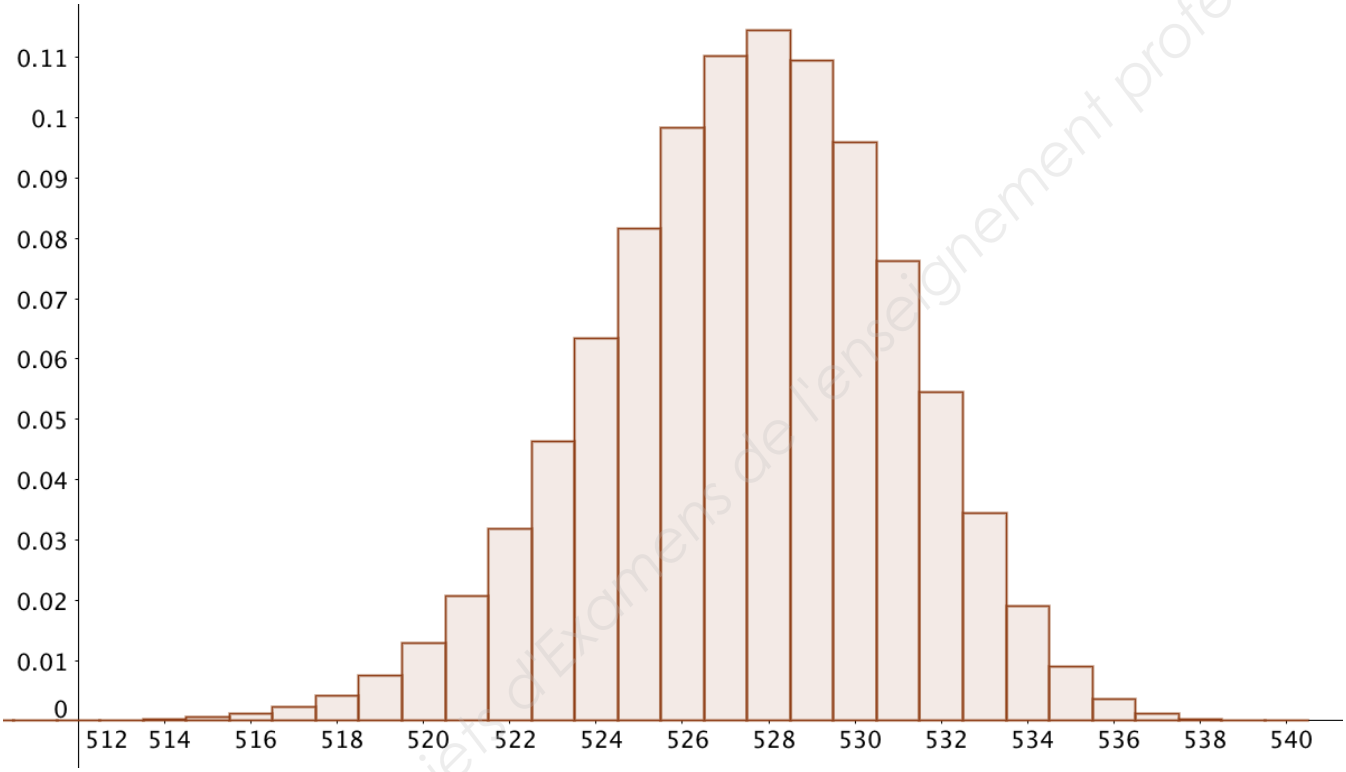
**Partie C : Distribution**

L'entreprise précédente fournit une grande surface en eau minérale. Chaque semaine, 540 bouteilles contenant un litre d'eau minérale sont réceptionnées par la grande surface.

Une bouteille d'eau minérale d'un litre est de très bonne qualité si elle contient moins de 4,7 mg de nitrate.

On prélève au hasard un lot de 540 bouteilles dans la production, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note alors $Y$ la variable aléatoire qui, à chaque lot de 540 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de très bonne qualité du lot.

On admet que $Y$ suit une loi binomiale dont une représentation graphique est fournie ci-dessous :




1) Au vu de ce graphique, un biologiste estime que la probabilité qu'un lot de 540 bouteilles prélevé au hasard dans la production contienne moins de 520 bouteilles de très bonne qualité est environ égal à 0,005. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

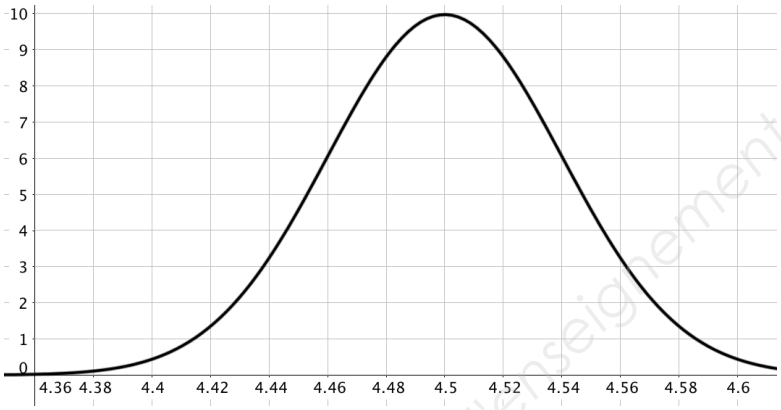
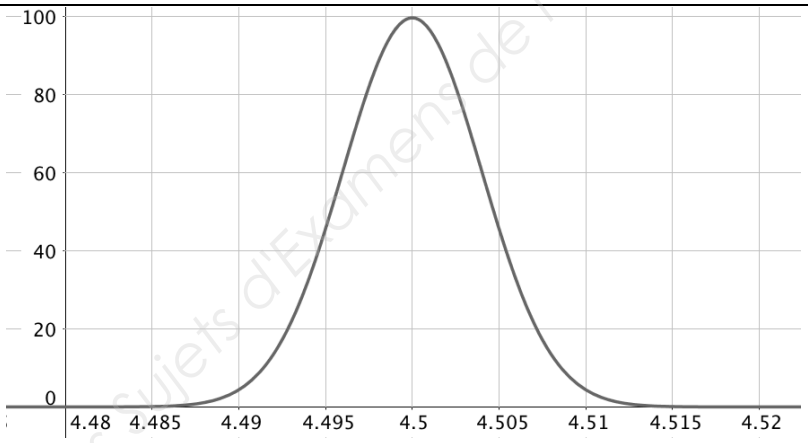
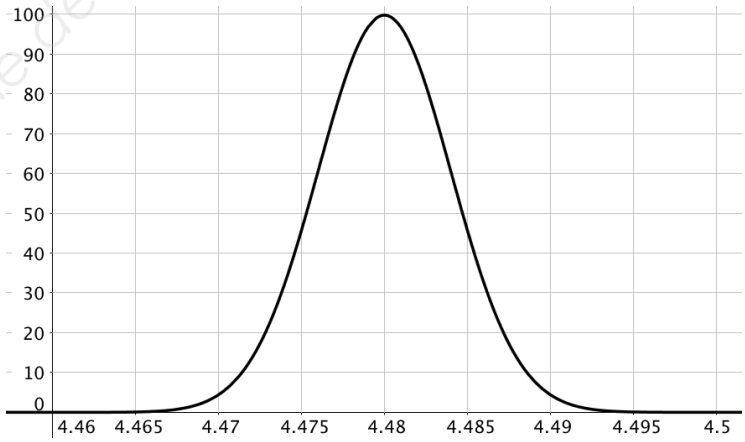
2) On admet que le nombre moyen de bouteilles de très bonne qualité sur l'ensemble des échantillons de 540 bouteilles est égal à 528. Donner alors les paramètres $n$ et $p$ de la loi binomiale suivie par la variable aléatoire $Y$. On arrondira $p$ à $10^{-3}$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

***Annexe 1 : Exercice 1 – question B.1 – À rendre avec la copie.***

| Heure $(t_i)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantité de *SA* $(N_i)$ | 10 | 27 | 78 | 232 | 650 | 1800 | 5100 | 14100 | 39000 |
| $z_i = ln\,(N_i)$ | | | | | | | | | |

***Annexe 2 : Exercice 2 – question B.3.a***

| | |
|---|---|
| ***Densité n°1*** |   |
| ***Densité n°2*** |   |
| ***Densité n°3*** |   |

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

**Nom de famille :**
*(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)*

**Prénom(s) :**

**Numéro Inscription :**

**Né(e) le :** / /

*(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)*

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.